공 학 수 학 보충문제 (제3장)

출처 : E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 8th ed., Wiley, 1999.
해답 : Kreyszig 공업수학 문제풀이 해답, 범한서적㈜, 2001. [도서관5층 지정도서실]

3-1 멱급수와 해석함수

■ 연습문제 4.2

수렴반지름. 다음 급수의 수렴반지름을 구하라.

13. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{m!}$ **14.** $\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)mx^m$ **15.** $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{3^m}(x-3)^{2m}$

16. $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{4m}$ **17.** $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{k^m} x^{2m}$ **18.** $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$

19. $\sum_{m=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^m x^{2m}$ **20.** $\sum_{m=0}^{\infty} m^m x^m$ **21.** $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m}(x-x_0)^{2m}$

합첨자의 이동. 이러한 연산은 거듭제곱급수 해법에서 자주 발생한다. 합기호 안의 거듭제곱이 x^m이 되도록 첨자를 이동하라. 처음 몇 항을 풀어씀으로써 결과를 확인하라. 또한 수렴반지름을 결정하라.

23. $\sum_{s=2}^{\infty} \frac{s(s+1)}{s^2+1} x^{s-1}$ **24.** $\sum_{p=2}^{\infty} p(p-1)x^{p-2}$ **25.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+2)!} x^{n+1}$

3-2 멱급수에 의한 미분방정식의 해

■ 연습문제 4.1

거듭제곱급수 해법의 기법. 다음의 미분방정식에 거듭제곱급수 해법을 적용하라. 풀이과정을 자세히 보여라. (이 종류의 더 많은 문제가 4.2절에 있다)

1. $y' = 3y$ **2.** $y' = ky$ **3.** $y' + 2y = 0$ **4.** $(1-x)y' = y$

5. $y' = 2xy$ **6.** $(1+x)y' = y$ **7.** $y' = xy$ **8.** $y'' = 4y$

9. $y'' + 9y = 0$ **10.** $y'' = y'$ **11.** $y' = 3x^2y$ **12.** $y'' = y$

■ 연습문제 4.2

거듭제곱급수해. 다음 미분방정식에 대하여 x의 거듭제곱급수해를 구하라(자세한 풀이과정을 보여라).

1. $y' = -2xy$ **2.** $(x-2)y' = xy$

3. $xy' - 3y = k$ (= 상수) **4.** $(1-x^2)y' = 2xy$

5. $y'' - 3y' + 2y = 0$ **6.** $y'' - 4xy' + (4x^2-2)y = 0$

7. $y'' + 4y = 0$ **8.** $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

$x - x_0$의 거듭제곱급수해는 $t = x - x_0$를 새로운 독립변수로 도입하고, 얻어진 방정식을 t의 거듭제곱급수로서 y에 대해 풀므로써 구할 수 있다. 다음 방정식에 대해 $x_0 = 1$로 놓고(간단히 하기 위해) 이와 같은 방법으로 풀어라(풀이과정을 자세히 보여라).

9. $y' = ky$ **10.** $y'' - y = 0$ **11.** $y' = (y/x) + 1$

12. x의 거듭제곱급수에 의해 문제 11의 방정식이 풀리지 않는 이유는?

3-3 Legendre방정식

■ 연습문제 4.3

1. **($n = 0$에 대한 Legendre 함수)** $n = 0$일 때 식 (6)이 $y_1(x) = P_0(x) = 1$이 됨을 보이고, 식 (7)이 다음과 같음을 보여라.

$$y_2(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{(-3)(-1)\cdot 2\cdot 4}{5!}x^5 + \cdots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$n = 0$일 때 $z = y'$라 놓고 변수분리를 이용하여 식 (1)을 풀어 위의 식을 증명하라.

2. **($n = 1$에 대한 Legendre 함수)** 식 (7)이 $n = 1$일 때 $y_2(x) = P_1(x) = x$가 됨을 보이고, 식 (6)이 다음과 같음을 보여라.

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{5} - \cdots = 1 - x\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) = 1 - \frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

7. **(미분방정식)** $(a^2 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$, $a \neq 0$의 해를 구하라.

3-4 Bessel방정식

■ 연습문제 4.5

Bessel 방정식으로 변환가능한 미분방정식 Bessel 함수의 식으로 일반해를 구하라

2. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 25)y = 0$

3. $4x^2y'' + 4xy' + (100x^2 - 9)y = 0$ $(5x = z)$

11. **(도함수)** $J_0'(x) = -J_1(x)$, $J_2'(x) = \frac{1}{2}[J_1(x) - J_3(x)]$임을 보여라

13. **(도함수)** 식 (24)를 이용하여 $J_1'(x) = J_0(x) - x^{-1}J_1(x)$임을 보여라.

Bessel 함수를 포함하는 적분은 종종 식 (24)-(27)을 사용하여 값이 구해지거나 적어도 간단하게 되어질 수 있다. 다음을 보여라.

22. $\int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,dx = x^{\nu}J_{\nu}(x) + c$

23. $\int x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,dx = -x^{-\nu}J_{\nu}(x) + c$

24. $\int J_{\nu+1}(x)\,dx = \int J_{\nu-1}(x)\,dx - 2J_{\nu}(x)$

문제 22-24의 공식과 필요하면, 부분적분을 이용하여 다음을 구하라.

25. $\int J_3(x)\,dx$

26. $\int x^3J_0(x)\,dx$

27. $\int J_5(x)\,dx$

■ 연습문제 4.6

Bessel 방정식으로 변환가능한 추가적인 미분방정식 일반해를 구하라.

1. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$

2. $x^2y'' + xy'' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0$ ($\lambda x = z$로 두고)