

공 학 수 학 보충문제 (제2장)

출처 : E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 8th ed., Wiley, 1999.

해답 : Kreyszig 공업수학 문제풀이 해답, 범한서적(주), 2001. [도서관5층 지정도서실]

2-1 기본적인 정의와 성질

■ 연습문제 2.2

1차독립은 본문에서 설명했던 것처럼 일반해와 관련하여 이 장에서 기본적으로 중요하다. 다음 함수들이 주어진 구간에서 1차독립인가 또는 종속인가? (풀이과정을 자세히 보여라)

18. e^{-x} , e^x 임의의 구간

19. 0 , $\tan x$ ($|x| < \pi/4$)

20. x^2 , $x^2 \ln x$ ($x \geq 1$)

21. $\ln x$, $\ln(x^4)$ ($x > 1$)

22. $\ln x$, $(\ln x)^4$ ($1 \leq x \leq 2$)

23. $\sin^2 x$, $\sin(x^2)$ ($0 < x < \sqrt{\pi}$)

24. $x|x|$, x^2 ($0 \leq x \leq 1$)

25. $x|x|$, x^2 ($|x| \leq 1$)

26. $\sin 2x$, $\cos x \sin x$ ($x < 0$)

2-2 상계수를 갖는 제차 미분방정식

■ 연습문제 2.2

일반해. 일반해를 구하고 구한 답을 대입하여 확인해 보아라.

1. $4y'' + 4y' - 3y = 0$

2. $y'' + 3.2y' + 2.56y = 0$

3. $2y'' - 9y' = 0$

4. $y'' - 8y = 0$

5. $y'' + 9y' + 20y = 0$

6. $16y'' - \pi^2 y = 0$

7. $9y'' - 30y' + 25y = 0$

8. $10y'' + 6y' - 4y = 0$

9. $y'' + 2ky' + k^2y = 0$

초기값 문제. 초기값 문제를 풀고 구한 답이 초기조건과 방정식을 만족하는지 검증해 보아라(풀이과정을 자세히 보여라).

10. $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = 10$, $y'(0) = 0$

11. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

12. $y'' - y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -3$

13. $8y'' - 2y' - y = 0$, $y(0) = -0.2$, $y'(0) = -0.325$

14. $4y'' - 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$

15. $y'' + 2.2y' + 1.17y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2.6$

16. $y'' - k^2y = 0$, ($k \neq 0$) $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

17. $4y'' - 4y' - 3y = 0$, $y(-2) = e$, $y'(-2) = -e/2$

■ 연습문제 2.3

일반해. 주어진 방정식이 경우 I, II, III 중 어디에 해당하는지를 설명하고, 실수 일반해를 구하라(유도과정의 각 과정을 보여라).

5. $25y'' + 40y' + 16y = 0$

6. $y'' + y' - 12y = 0$

7. $16y'' - 8y' + 5y = 0$

8. $y'' + 4y' + (4 + \omega^2)y = 0$

9. $y'' - 9\pi^2 y = 0$

10. $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2.5y = 0$

11. $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$

12. $y'' + 2ky' + (k^2 + k^{-2})y = 0$

초기값 문제. 다음 문제를 풀어라(각 과정을 보여라).

13. $9y'' + 6y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -13/3$
 14. $4y'' + 16y' + 17y = 0, \quad y(0) = -0.5, \quad y'(0) = 1$
 15. $y'' - 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 20$
 16. $y'' + 0.4y' + 0.29y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.2$
 17. $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = -17$
 18. $y'' - 2y' + (4\pi^2 + 1)y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 6\pi - 2$

경계값 문제. 다음 문제를 풀어라(각 과정을 보여라).

19. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y(\pi/2) = -3$
 20. $y'' - 25y = 0, \quad y(-2) = y(2) = \cosh 10$
 21. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = 0$
 22. $3y'' - 8y' - 3y = 0, \quad y(-3) = 1, \quad y(3) = 1/e^2$

2-3 Euler 방정식

■ 연습문제 2.6

2. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
 3. $x^2y'' - 20y = 0$
 4. $xy'' + 2y' = 0$
 5. $10x^2y'' + 46xy' + 32.4y = 0$
 6. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$
 7. $x^2y'' + xy' + y = 0$

초기값 문제. 해를 구하고 그래프를 그려라(풀이 과정을 보여라).

14. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(1) = 1.5, \quad y'(1) = 1$
 15. $4x^2y'' + 24xy' + 25y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -6$
 16. $x^2y'' + xy' + 9y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$

2-4 차수내림과 1계 도함수의 소거

■ 연습문제 2.1

예제 7 또는 문제 1과 2에서 사용한 방법을 이용하여, 1계로 축소시켜 해를 구하라(풀이과정의 각 단계를 자세히 보여라).

3. $y'' = y'$
 4. $2xy'' = 3y'$
 5. $yy'' = 2y'^2$
 6. $xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y_1 = (\sin x)/x$
 7. $y'' + e^y y'^3 = 0$
 8. $xy'' + y' = 0$
 9. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0, \quad y_1 = x^3$
 10. $y'' + (1 + y^{-1})y'^2 = 0$
 11. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0, \quad y_1 = x^{-1/2} \cos x$
 12. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x$

2-5 비제차 미분방정식의 성질

■ 연습문제 2.8

특수해와 일반해. y_p 가 주어진 미분방정식의 해임을 보이고 일반해를 구하라(풀이과정을 자세히 보여라).

1. $y'' - y = 8e^{-3x}$, $y_p = e^{-3x}$
2. $y'' - y = 8e^{-3x}$, $y_p = e^{-3x} - 3e^x$
3. $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$, $y_p = 2x^2 - 6x + 7$
4. $y'' - 2y' + 5y = 5x^3 - 6x^2 + 6x$, $y_p = x^3$

초기값 문제. 문제 9-15에서, y_p 가 주어진 방정식의 해임을 증명하고 초기값 문제를 풀어라(풀이과정을 자세히 보여라).

9. $y'' + y = 2x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 8$; $y_p = 2x$
10. $y'' - y = 2 \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -0.2$; $y_p = -\cos x$
11. $y'' - y = 2e^x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$; $y_p = xe^x$

2-6 미정계수법

■ 연습문제 2.9

비제차방정식의 일반해

(실수) 일반해를 구하고 사용한 법칙을 명시하라(계산과정의 각 단계를 보여라).

- | | |
|--|---|
| 1. $y'' + 4y = \sin 3x$ | 2. $y'' - y = 2e^x + 6e^{2x}$ |
| 3. $y'' + 3y' = 28 \cosh 4x$ | 4. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$ |
| 5. $y'' + 2y' + 10y = 25x^2 + 3$ | 6. $3y'' + 10y' + 3y = 9x + 5 \cos x$ |
| 7. $y'' + y' - 6y = -6x^3 + 3x^2 + 6x$ | 8. $y'' + 6y' + 9y = 50e^{-x} \cos x$ |
| 9. $y'' + 2y' - 35y = 12e^{5x} + 37 \sin 5x$ | 10. $y'' - y' - \frac{3}{4}y = 21 \sinh 2x$ |
| 11. $y'' + 10y' + 25y = e^{-5x}$ | 12. $y'' + 3y' - 18y = 9 \sinh 3x$ |
| 13. $y'' + 8y' + 16y = 64 \cosh 4x$ | 14. $y'' - 4y' + 20y = 377 \sin x$ |

비제차방정식에 대한 초기값 문제

다음의 주어진 초기값 문제를 풀고 사용한 법칙을 명시하라. 계산과정의 각 단계를 보여라.

15. $y'' + 1.5y' - y = 12x^2 + 6x^3 - x^4$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -8$
16. $y'' - 6y' + 13y = 4e^{3x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$
17. $y'' - 4y = e^{-2x} - 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
18. $y'' + 9y = 6 \cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
19. $y'' + 1.2y' + 0.36y = 4e^{-0.6x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
20. $y'' - 2.8y' + 1.96y = 2e^{1.4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
21. $y'' + y' = 2 + 2x + x^2$, $y(0) = 8$, $y'(0) = -1$
22. $y'' + y' + 9.25y = 9.25(4 + e^{-x})$, $y(0) = 7$, $y'(0) = -2$

2-7 변수변분법 (매개변수변환법)

■ 연습문제 2.10

비제차방정식의 일반해. 자세한 계산과정을 보이면서 일반해를 구하라.

$$1. y'' - 4y' + 4y = e^{2x}/x$$

$$2. y'' + 9y = \sec 3x$$

$$3. y'' + 2y' + y = e^{-x} \cos x$$

$$4. y'' + 9y = \csc 3x$$

$$5. y'' - 2y' + y = e^x/x^3$$

$$6. y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \csc x$$

비제차 오일러-코시 방정식. 자세한 계산과정을 보이면서 일반해를 구하라. 주의: 표준형 (1)을 얻기 위해 먼저 방정식을 y'' 의 계수로 나누어라.

$$11. x^2y'' - 4xy' + 6y = 21x^{-4}$$

$$12. xy'' - y' = (3+x)x^2e^x$$

$$13. 4x^2y'' + 8xy' - 3y = 7x^2 - 15x^3$$

2-8 초기값문제와 경계값문제

■ 복습문제

일반해. 일반해를 구하라(계산과정을 자세히 보여라).

$$16. 4y'' + 24y' + 37y = 0$$

$$17. 2y'' - 3y' - 2y = 13 - 2x^2$$

$$18. x^2y'' + xy' - 9y = 0$$

$$19. x^2y'' - 3xy' + 4y = 12$$

$$22. y'' - 2\pi y' + \pi^2 y = 2e^{\pi x}$$

$$23. y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} \cos 2x$$

초기값 문제. 다음의 문제를 풀어라(과정을 자세히 보여라).

$$31. y'' + 16y = 17e^x, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = -2$$

$$32. y'' - 3y' + 2y = 10 \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6$$

$$33. x^2y'' - 4xy' + 6y = \pi^2 x^4 \sin \pi x, \quad y(1) = 5, \quad y'(1) = 5 + \pi$$

$$34. y'' + 4y' + (4 + \omega^2)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \omega - 2$$

$$35. y'' + 4y = 8e^{-2x} + 4x^2 + 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$$